

# Valeur absolue d'un nombre

## I. Cours

### Définition :

Soit  $x$  un nombre réel. On appelle valeur absolue de  $x$ , notée  $|x|$ , le nombre **positif ou nul** tel que :

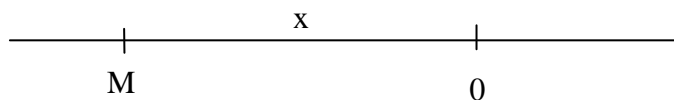
$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{si } x \leq 0$$

**Exemples :**  $|20| = 20$   
 $|-3| = 3$   
 $|1-\pi| = \pi-1$  car  $1-\pi < 0$

### Interprétation graphique de la valeur absolue :

Soit M le point image de  $x$ . On a  $|x| = OM$ .



### Propriétés :

Pour tout  $x$  réel, on a :

$$|x| \geq 0$$

$$|x| = |-x|$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$$

Valeur absolue d'un produit :  $|xy| = |x||y|$

Valeur absolue d'un quotient :  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

☛ Valeur absolue d'une somme : elle n'est en général pas égal à la somme des valeurs absolues.

En revanche, on a toujours :  $|x + y| \leq |x| + |y|$

## Equations et inéquations avec des valeurs absolues :

- ⇒  $|x| = a$  équivaut à  $x = a$  ou  $x = -a$  suivant le signe de  $x$
- ⇒  $|x| \leq a$  équivaut à  $-a \leq x \leq a$
- ⇒  $|x| > a$  équivaut à  $x < -a$  ou  $x > a$

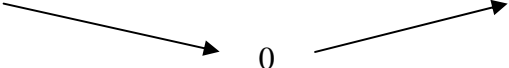
## La fonction valeur absolue :

Soit  $f$  telle que  $f(x) = |x|$

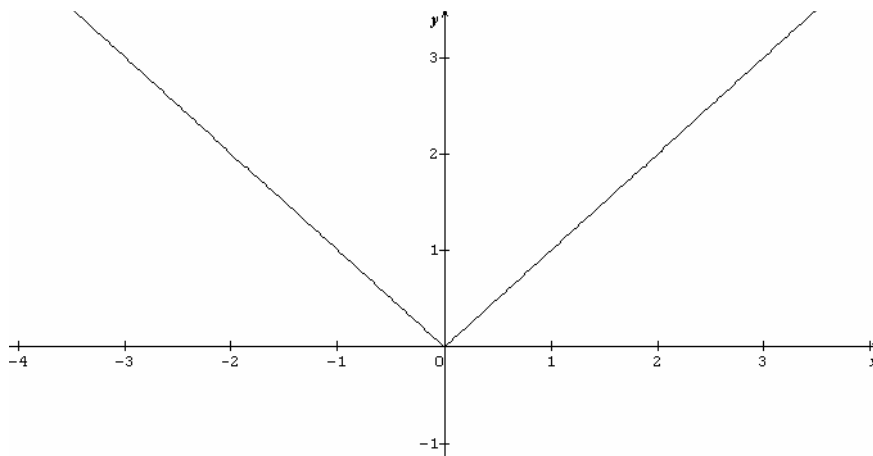
On a  $f(x) = x$  si  $x \geq 0$

et  $f(x) = -x$  si  $x \leq 0$

$f$  est donc une fonction affine, et peut représenter son tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$0$	$\infty$
$ x $			

Représentation graphique de la fonction valeur absolue :



## II. Exercices

### Résoudre :

Essayez de résoudre sans regarder les solutions qui se trouvent page suivante. Donner les solutions sous forme d'intervalles.

1.  $|-x| \leq 3$
2.  $|2x+7| \leq 21$
3.  $|3x| > 7$
4.  $3 \leq |x-1| \leq 9$

## Solutions :

$$\begin{aligned} 1. \quad & |-x| \leq 3 \\ & |x| \leq 3 \\ & -3 \leq x \leq 3 \\ \text{Donc } S_1 &= [-3; 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & |2x+7| \leq 21 \\ & -21 \leq 2x+7 \leq 21 \\ & -28 \leq 2x \leq 14 \\ & -14 \leq x \leq 7 \\ S_2 &= [-14; 7] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & |3x| > 7 \\ & 3x < -7 \quad \text{ou} \quad 3x > 7 \\ & x < -\frac{7}{3} \quad \text{ou} \quad x > \frac{7}{3} \\ S_3 &= ]-\infty; -\frac{7}{3}[ \cup ]\frac{7}{3}; +\infty[ \end{aligned}$$

$$4. \quad 3 \leq |x-1| \leq 9$$

Il faut résoudre deux inéquations :  $3 \leq |x-1|$  (a) et  $|x-1| \leq 9$  (b)

$$\begin{aligned} & |x-1| \geq 3 \\ (a) \quad & x-1 \leq -3 \quad \text{ou} \quad x-1 \geq 3 \\ & x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 4 \\ S_a &= ]-\infty; -2] \cup [4; +\infty[ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x-1| \leq 9 \\ (b) \quad & -9 \leq x-1 \leq 9 \\ & -8 \leq x \leq 10 \\ S_b &= [-8; 10] \end{aligned}$$

La solution de 4 doit vérifier les solutions de (a) et de (b) :  $S_4 = S_a \cap S_b = [-8; -2] \cup [4; 10]$