Polynômes

Petits rappels importants :

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

I. La fonction polynôme

1. Définition :

Une fonction polynôme est une fonction définie sur R et pour laquelle $f(x)$ est de la forme suivante :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

avec $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$ des nombres réels et n un entier.

Exemples :
$f(x) = x^2 - 3x + 1$
$f(x) = x^9 - \sqrt{3}x^6 - 8$
$f(x) = x^4$

💣 Certaines fonctions ressemblent à des polynômes mais n'en sont pas :

$f(x) = x^2 + 2x + \sqrt{x} + 2$ car $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas de la forme x^n avec n entier.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Ici on a $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ pour $x \neq 1$, donc f n'est pas définie sur R !

2. Le polynôme nul :

Si $f(x) = 0$ pour tout x, la fonction f est le polynôme nul.

Théorème :

Soit $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Si $f(x) = 0$ pour tout x, alors on a :

$$\begin{aligned} &a_n = 0 \\ &a_{n-1} = 0 \\ &..... \\ &a_1 = 0 \\ &a_0 = 0 \end{aligned}$$

💣 Il ne faut pas confondre le polynôme nul, qui vaut 0 quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et un polynôme qui prend la valeur 0 pour une valeur de x donné.

Par exemple : soit $f(x) = x^2 + x$, on a $f(x) = 0$ si $x = -1$, mais $f(x)$ n'est pas le polynôme nul (par exemple $f(2) = 6$) !

3. Unicité de l'écriture d'un polynôme :

Théorème :
L'écriture d'un polynôme sous la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ (avec $a_n \neq 0$, $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ des nombres réels et n un entier) est unique

$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont appelés les coefficients.
n est le degré du polynôme.
L'écriture ci-dessus est la forme réduite, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Exemples :
$f(x) = x^2 - 3x + 1$ est un polynôme de degré 2.
$f(x) = x^7$ est un polynôme de degré 7.
$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 4.

Remarques :
Une fonction polynôme de degré 1 est une fonction affine : $f(x) = a_1 x + a_0$
Un polynôme de degré 0 est une constante : $f(x) = a_0$

4. Egalité de deux fonctions polynômes :

Deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont le même degré et si leurs coefficients dans l'écriture réduite ordonnée sont égaux.

Si pour tout x de R on a : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$
alors on peut en déduire que :

$$\begin{aligned} a_n &= b_n \\ a_{n-1} &= b_{n-1} \\ &... \\ a_1 &= b_1 \\ a_0 &= b_0 \end{aligned}$$

Exemples : Déterminer a, b, c tels que, pour tout x de R, on ait :

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$

Solution :

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$ pour tout x de R

D'après le théorème si dessus, on en déduit que : $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = -1 \\ -c = -3 \end{cases}$

Donc que :
$a = 1$
$b - 1 = 3$ donc $b = 4$
$c = 3$

Autre question : en déduire la résolution de l'équation $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

Solution :
On a vu que : $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x^2 + 4x + 3)$
$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ équivaut donc à $(x-1)(x^2 + 4x + 3) = 0$
On a donc :

$x - 1 = 0$	ou	$x^2 + 4x + 3 = 0$		
$x = 1$	ou	$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 = 2^2$		
		$x = \frac{-4+2}{2}$	ou	$x = \frac{-4-2}{2}$
		$x = -1$	ou	$x = -3$

Donc S = {-3 ;-1 ;1}

Exemple : Déterminer a, b, c tels que, pour tout x de R, on ait :

$$x^4 + 3x - 2 = (x^2 + 1)(ax^2 + bx + c)$$

Solution :

$(x^2+1)(ax^2+bx+c)=ax^4+bx^3+cx^2+ax^2+bx+c$

$(x^2+1)(ax^2+bx+c)=ax^4+bx^3+(c+a)x^2+bx+c$

Pour que $x^4+3x-2=ax^4+bx^3+(c+a)x^2+bx+c$ pour tout x de R, il faut que :

$$\begin{aligned} a&=1\\ b&=0\\ c+a&=0\\ b&=3\\ c&=-2 \end{aligned}$$

$b=0$ et $b=3$: impossible !! Il n'y a donc pas de solution !

Exemple : $f(x)=\dfrac{2x^2-x-5}{x-2}$

Déterminer a,b,c tels que, pour tout $x\neq 2$ de R, on ait : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

Solution :

Notons $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

$g(x)=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

$g(x)=\dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}$

$g(x)=\dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$

Pour que $f(x)=g(x)$ pour tout $x\neq 2$ de R, il faut que :

$2x^2-x-5=ax^2+(b-2a)x-2b+c$ pour tout x de R

Donc il faut que :

$$\begin{aligned} a&=2 & & & a&=2\\ b-2a&=-1 & &\Rightarrow & b&=-1+2a=-1+4=3\\ -2b+c&=-5 & & & c&=-5+2b=-5+6=1 \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{2x^2-x-5}{x-2}=2x+3+\dfrac{1}{x-2}$

Exemple : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x+1}$

Déterminer a,b,c tels que, pour tout $x \neq -1$ de R, on ait : $f(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x+1}$

Solution :

Notons $g(x) = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x+1}$

$$g(x) = \frac{(ax^2+bx+c)(x+1)+d}{x+1}$$
$$g(x) = \frac{ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c+d}{x+1}$$
$$g(x) = \frac{ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c+d}{x+1}$$

Pour que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq -1$ de R, il faut que :
$x^3+2x^2+1 = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c+d$ pour tout x de R

donc il faut que :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \\ b+c=0 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2-a=1 \\ c=0-b=-1 \\ d=1-c=2 \end{cases}$$

Donc $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x+1} = x^2+x-1+\dfrac{2}{x+1}$

II. Opérations sur les fonctions polynômes :

1. Somme :

Soit f et g deux fonctions polynômes, la fonction $f+g$ est définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, et $f+g$ est une fonction polynôme.

Exemple :

$f(x) = x^4+3x-2$ et $g(x) = x^3+3x+2$

$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$(f+g)(x) = x^4+x^3+6x$

$f(x) = 3x^3 + x^2 - x$ (degré 3) et $g(x) = -3x^3 + 2x + 2$ (degré 3)
$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$(f+g)(x) = x^2 + x + 2$ (degré 2)

Degré de la somme de deux polynômes :

Si le degré de f est supérieur au degré de g, alors le degré de $f+g$ est le plus fort des deux degrés.

Si degré de f est égal au degré de g, alors le degré de $f+g$ est inférieur ou égal au degré de f ou de g.

2. Produit de deux polynômes :

Soit f et g deux fonctions polynômes, la fonction polynôme fg est définie par :

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) \text{ pour tout } x \text{ de R}$$

Exemple :
$f(x) = x^4 + 3x - 2$ (degré 4) et $g(x) = x^3 + 3x + 2$ (degré 3)
$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$
$(fg)(x) = (x^4 + 3x - 2) \times (x^3 + 3x + 2)$
$(fg)(x) = x^7 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^4 + 9x^2 + 6x - 2x^3 - 6x - 4$
$(fg)(x) = x^7 + 3x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 9x^2 - 4$ (degré 7 = 3 + 4)

Degré du Produit de deux polynômes :

degré(fg) = degré(f) + degré(g)

3. Quotient de deux polynômes :

💣 Le quotient de deux polynômes n'est en général pas un polynôme mais une fonction rationnelle.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) \neq 0 \text{ (sinon, le quotient n'existe pas)}$$

Exemple : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ et $g(x) = x^2 - 1$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 - 1} \qquad \text{avec } D_{\left(\frac{f}{g}\right)} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\text{ car il faut que } x^2 - 1 \neq 0$$

III. Racine et factorisation d'un polynôme :

1. Racine d'un polynôme :

Définition :

On appelle α racine du polynôme P si $P(\alpha)=0$

Exemple :

$P(x)=3x^3-2x^2-2x+1$

Démontrer que 1 est racine de P.

Solution :

Cela revient donc à démontrer que $P(1)=0$

Il faut donc calculer $P(1)$:

$P(1)=3-2-2+1=0$

α est bien une racine du polynôme P.

2. Polynôme factorisable :

Dire qu'un polynôme $P(x)$ est factorisable signifie qu'il existe deux polynômes $R(x)$ et $Q(x)$ de degré supérieur ou égal à 1 tels que :

$$P(x)=R(x)\times Q(x)$$

Exemple :

$P(x)-3x^2-4x-1$ est factorisable car :

$P(x)=(-x-1)(3x+1)$

3. Factorisation d'un polynôme par $x-\alpha$:

Théorèmes importants :

Si $P(x)$ est factorisable par $x-\alpha$, alors α est une racine de $P(x)$.

Si α est une racine de $P(x)$, alors $P(x)$ est factorisable par $x-\alpha$.

On peut écrire ces deux théorèmes comme suit :

$P(x)$ est factorisable par $x-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P(\alpha)=0$

Démonstration :

Si $P(x)$ est factorisable par $x-\alpha$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ donc $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)=0$

α est une racine de $P(x)$.

Démonstration de la réciproque pour un polynôme de degré 3 :
Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tel que $P(\alpha)=0$ (α est une racine de $P(x)$)

$$P(\alpha)=a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$$
$$P(x)-P(\alpha)=a(x^3-\alpha^3)+b(x^2-\alpha^2)+c(x-\alpha)$$
$$P(x)-P(\alpha)=a(x-\alpha)(x^2+x\alpha+\alpha^2)+b(x-\alpha)(x+\alpha)+c(x-\alpha)$$
$$P(x)-P(\alpha)=(x-\alpha)(a(x^2+x\alpha+\alpha^2)+b(x+\alpha)+c)$$

Or $P(\alpha)=0$ donc $P(x)-P(\alpha)=P(x)$
Donc $P(x)$ est factorisable par $x-\alpha$.

4. Exemples de factorisation d'un polynôme

Méthode des coefficients indéterminés :

Commençons par un exemple :
$P(x)=3x^3-4x^2-3x+2$
Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-2)$ et faire la factorisation.

Calculons $P(2)$:
$P(2)=3\times2^3-4\times2^2-3\times2-2=24-16-6-2=0$
Donc 2 est racine de $P(x)$, $P(x)$ est donc factorisable par $(x-2)$.

Soient a,b,c trois réels, on peut écrire $P(x)$ sous la forme :
$$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$$
$$P(x)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$$
$$P(x)=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$$
On a donc :
$$\begin{array}{l} a=3 \\ b-2a=-4 \\ c-2b=-3 \\ -2c=-2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a=3 \\ b=-4+2a=2 \\ c=-3+2b=1 \end{array}$$

Donc $P(x)=3x^3-4x^2-3x+2=(x-2)(3x^2+2x+1)$

Autre exemple :
$P(x)=-2x^3-3x^2+10x+3$
Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(x+3)$ et faire la factorisation.

Si $P(x)$ est factorisable par $(x+3)$, cela signifie que -3 est racine de $P(x)$.

$P(-3) = -2(-27) - 3\times 9 + 10(-3) + 3$
$P(-3) = 54 - 27 - 30 + 3$
$P(-3) = 0$

Donc -3 est racine de $P(x)$, le polynôme est factorisable par $(x+3)$.
Soient a, b, c trois réels, on peut écrire $P(x)$ sous la forme :
$P(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$
$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3ax^2 + 3bx + 3c$
$P(x) = ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c$
...

Autre méthode :
En réalité, il est facile de trouver directement a et c par cette méthode et il est inutile de les calculer. a est le coefficient devant x qui a la plus haute puissance (ici -2) et c est en réalité la constante divisé par l'inverse de la racine (ici 1). On calcule seulement b.
Il existe un réel b tel que :
$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 10x + 3 = (x+3)(-2x^2 + bx + 1)$
Cette méthode sert à gagner un peu de temps et à éviter de calculer a et c. Vous n'êtes pas obligé de l'utiliser si vous la trouvez trop difficile…

Dernier exemple :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 1$
Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(2x-1)$ et faire la factorisation.

Remarquez que : $(2x-1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{4} = 0$

Donc $\frac{1}{2}$ est racine de $P(x)$. Le polynôme est factorisable par $(x - \frac{1}{2})$, donc aussi par $2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, donc aussi par $(2x-1)$.

Soient a, b, c trois réels, on peut écrire $P(x)$ sous la forme : $P(x) = (2x-1)(ax^2 + bx + c)$
Or $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 1$, donc on peut conclure directement que $a = 1$ et $c = 1$.
On cherche b tel que :
$P(x) = (2x-1)(x^2 + bx + 1)$
$P(x) = 2x^3 + 2bx^2 + 2x - x^2 - bx - 1$
$P(x) = 2x^3 + (2b-1)x^2 + (2-b)x - 1$
Donc $2b - 1 = 5$
Donc $b = 3$
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 1 = (2x-1)(x^2 + 3x + 1)$

Méthode par division de polynômes :

1

1er exemple :

$P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 11x - 20$

Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-5)$ et faire la factorisation.

$P(5) = 250 - 175 - 55 - 20$

$P(5) = 0$

5 est racine, donc $P(x)$ est factorisable par $(x-5)$.

Divisons le polynôme par $(x-5)$:

1ère étape :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 7x^2 - 11x - 20 & x-5 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 10x^2) & 2x^2 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 11x - 20 & \end{array}$$

2ème étape :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 7x^2 - 11x - 20 & x-5 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 10x^2) & 2x^2 + 3x \\ \cline{1-1} 3x^2 - 11x - 20 & \\ -(3x^2 - 15x) & \\ \cline{1-1} 4x - 20 & \end{array}$$

3ème étape :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 7x^2 - 11x - 20 & x-5 \\ \cline{2-2} -(2x^3 - 10x^2) & 2x^2 + 3x + 4 \\ \cline{1-1} 3x^2 - 11x - 20 & \\ -(3x^2 - 15x) & \\ \cline{1-1} 4x - 20 & \\ -(4x - 20) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Donc $2x^3 - 7x^2 - 11x - 20 = (x-5)(2x^2 + 3x + 4)$

2ème exemple :

$P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x - 2$

Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-2)$ et faire la factorisation en divisant $P(x)$ par $(x-2)$.

$P(2) = 24 - 16 - 6 - 2 = 0$

$P(x)$ est donc factorisable par $(x-2)$.

$$\begin{array}{r|l}
3x^3-4x^2-3x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(3x^3-6x^2)} & 3x^2+2x+1 \\
2x^2-3x-2 & \\
\underline{-(2x^2-4x)} & \\
x-2 & \\
\underline{-(x-2)} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $\quad 3x^3-4x^2-3x-2=(x-2)(3x^2+2x+1)$

5. Factorisation par $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)...$:

Théorème :

Si $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ sont des racines distinctes de $P(x)$, alors $P(x)$ est factorisable par $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

Exemple :

$P(x)=2x^4-2x^3-3x^2-x-2$

Démontrer que $P(x)$ est factorisable par $(x+1)(x-2)$, puis faire la factorisation par division successives de polynômes.

Solution :

$P(-1)=2+2-3+1-2=0$

$P(2)=32-16-12-2-2=0$

-1 et 2 sont racines, donc $P(x)$ est factorisable par $(x+1)(x-2)$.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-2x^3-3x^2-x-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-(2x^4+2x^3)} & 2x^3-4x^2+x-2 \\
-4x^3-3x^2-x-2 & \\
\underline{-(4x^3-4x^2)} & \\
x^2-x-2 & \\
\underline{-(x^2+x)} & \\
-2x-2 & \\
\underline{-(2x-2)} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
2x^3-4x^2+x-2 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(2x^3-4x^2)} & 2x^2+1 \\
0+x-2 & \\
\underline{-(x-2)} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $2x^4-2x^3-3x^2-x-2=(x+1)(x-2)(2x^2+1)$

6. Nombre maximum de racines d'un polynôme :

Tout polynôme de degré n (n entier) admet au plus n racines.

IV. Quelques applications des polynômes :

1. Fonctions rationnelles :

Rappel : Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômes.

Exemple :

$$f(x)=\frac{4x^2-1}{x-2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{4x^2-1}{x+3}$$

Exemples de simplification de fonctions rationnelles :

$$f(x)=\frac{3x^3-2x-1}{x^2-1}$$

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$ puis simplifier par $x-1$.

Solution :

$f(x)$ existe si $x^2-1\neq 0$ donc si $x\neq 1$ et $x\neq -1$

$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

Soit $N(x)=3x^3-2x-1$ (c'est le numérateur de $f(x)$).

$N(1)=3-2-1=0$ donc $N(x)$ est factorisable par $x-1$

Il existe b de R tel que :

$N(x)=(x-1)(3x^2+bx+1)$

$N(x)=3x^3+bx^2+x-3x^2-bx-1$

$N(x)=3x^3+(b-3)x^2+(1-b)x-1$

Donc $b-3=0 \quad\Rightarrow\quad b=3$

$N(x)=(x-1)(3x^2+3x+1)$

$$f(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+1)}{x^2-1}$$

$$f(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$f(x)=\frac{3x^2+3x+1}{x+1}$$

Autre exemple :

$$f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^3+1}$$

Déterminer l'ensemble de définition de $f(x)$ puis simplifier par $x+1$.

Solution :

$f(x)$ existe si $x^3+1\neq 0$ donc si $x\neq -1$

$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1:+\infty[$

Soit $N(x)=3x^2+x-2$

$N(-1)=3-1-2=0$

donc $N(x)$ est factorisable par $x+1$

$N(x)=(x+1)(3x-2)$

$$f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{x^3+1}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$f(x)=\frac{3x-2}{x^2-x+1}$$

<u>Transformation d'écriture de fonctions rationnelles :</u>

Exemple :

$$f(x)=\frac{4x-5}{x^2-x-2}$$

Déterminez les réels a et b tels que pour tout x de l'ensemble de définition de f, on ait :

$$f(x)=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+1}$$

Solution :

$f(x)$ existe si $x^2-x-2\neq 0$ soit si $x\neq -1$ et $x\neq 2$

Donc $Df = R-\{-1;2\}$ (= tout R sauf -1 et 2)

Notons $g(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x+1}$

$$g(x)=\frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x-2)(x+1)}$$

$$g(x)=\frac{(a+b)x+a-2b}{x^2-x-2}$$

Pour que $g(x)=f(x)$ pour tout x de Df , il faut donc que :

$$\begin{aligned} a+b&=4 \\ a-2b&=-5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a&=4-b \\ a-2b&=4-b-2b=4-3b=-5 \end{aligned}$$

Donc $\begin{aligned} b&=3 \\ a&=1 \end{aligned}$

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}$$

Autre exemple :

$$f(x)=\frac{2x^2-5x-2}{x-3}$$

$Df=R-\{3\}$

Déterminez les réels a,b et c tels que pour tout x de Df , on ait :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

Solution :

Soit $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

$$g(x)=\frac{ax(x-3)+b(x-3)+c}{x-3}$$

$$g(x)=\frac{ax^2+(b-3a)x-3b+c}{x-3}$$

Pour que $g(x)=f(x)$ pour tout x de Df , il faut donc que :

$$\begin{aligned} a&=2 \\ b-3a&=-5 \\ c-3b&=-2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a&=2 \\ b&=1 \\ c&=1 \end{aligned}$$

Donc $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x-3}$ pour tout x de Df .

2. Exemples d'inéquations de degré supérieur à 2 :

Résoudre $\dfrac{2x^3+3x^2+2x-1}{x^2-x-6}\geq -1$

$$\frac{2x^3+3x^2+2x-1+x^2-x-6}{x^2-x-6} \geq 0$$

$$\frac{2x^3+4x^2+x-7}{x^2-x-6} \geq 0$$

1 est racine du numérateur donc celui-ci est factorisable par $x-1$

$$2x^3+4x^2+x-7=(x-1)(ax^2+bx+c)$$

$$2x^3+4x^2+x-7=(x-1)(2x^2+bx+7)$$

$$2x^3+4x^2+x-7=2x^3+(b-2)x^2+(7-b)x+7$$

Pour que les 2 membres soient égaux, il faut que :

$b-2=4$

$7-b=1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $b=6$

Donc $2x^3+3x^2+2x-1=(x-1)(2x^2+6x+7)$

L'inéquation est donc équivalente à :

$$\frac{(x-1)(2x^2+6x+7)}{x^2-x-6} \geq 0$$

Factorisons le dénominateur x^2-x-6 en cherchant les racines :

$\Delta = 1-4\times(-6)=25=5^2$

$x'=\frac{1+5}{2}=3$ et $x''=\frac{1-5}{2}=-2$

Donc $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

L'inéquation devient : $\frac{(x-1)(2x^2+6x+7)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$

Pour résoudre cette inéquation, il faut en calculer le signe. Il faut calculer séparément le signe de chacune des expressions entre parenthèses :

Signe de $2x^2+6x+7$: $\Delta = 36-8\times 7<0$ l'expression est toujours positive.

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		-		-	0	+		+	
$2x^2+6x+7$		+		+		+		+	
$x-3$		-		-		-	0	+	
$x+2$		-	0	+		+		+	
$\frac{(x-1)(2x^2+6x+7)}{(x-3)(x+2)}$		-	‖	+		-	‖	+	

La solution est : $S=\left]-2;1\right]\cup\left]3;+\infty\right[$