

# Suites numériques

## I – Généralités sur les suites

### 1. Exemples préliminaires :

#### 1<sup>er</sup> exemple :

Au 1<sup>er</sup> janvier 2007, la population d'une ville est de 200 000 habitants. Notons la  $P_0$ .

Des experts estiment que cette population doit augmenter de 4 000 habitants par an dans les années à venir.

Notons  $P_n$  la population de la ville à l'année 2007+n.

Donner  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ .

#### Solution :

Au 1<sup>er</sup> janvier 2007, la population est de  $P_0$  habitants, et  $P_0 = 200000$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2008, la population est de  $P_1$  habitants, et  $P_1 = P_0 + 4000 = 204000$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2009, la population est de  $P_2$  habitants, et  $P_2 = P_1 + 4000 = 208000$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2010, la population est de  $P_3$  habitants, et  $P_3 = P_2 + 4000 = 212000$

Ainsi de suite...

On a  $P_{n+1} = P_n + 4000$

#### 2<sup>ème</sup> exemple :

On suppose maintenant que la population augmente de 2% par an.

#### Solution :

Au 1<sup>er</sup> janvier 2007, la population est de  $P_0$  habitants, et  $P_0 = 200000$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2008, la population est de  $P_1$  habitants, et

$$P_1 = P_0 + P_0 \times \frac{2}{100} = P_0 \left( 1 + \frac{2}{100} \right) = 1,02 \times P_0 = 1,02 \times 200000 = 204000$$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2009, la population est de  $P_2$  habitants, et

$$P_2 = 1,02 \times P_1 = 1,02 \times 204000 = 208080$$

Au 1<sup>er</sup> janvier 2010, la population est de  $P_3$  habitants, et  $P_3 = 1,02 \times P_2 = 212242$

Ainsi de suite...

$$\text{On a } P_{n+1} = P_n + \frac{2}{100} P_n$$

$$P_{n+1} = 1,02 \times P_n$$

## 2. Définition d'une suite :

Une suite est une fonction de l'ensemble  $\mathbb{N}$  (ou d'une partie de  $\mathbb{N}$ ) dans  $\mathbb{R}$ .  
On écrit  $u_n$  pour désigner l'image de  $n$  par la suite  $u$ .

On note souvent  $(u_n)$  ou  $u$  la suite en tant qu'objet mathématique.  $u_n$ , sans parenthèses, désigne l'image de  $n$  par  $(u_n)$ . C'est le terme d'indice  $n$  de la suite.

### Exemples :

- Soit la suite  $u$  de terme général  $u_n = 2n$   
On a :  $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6 \dots$   
Les termes de la suite  $u$  sont les entiers pairs.
  
- Soit la suite  $u$  de terme général  $u_n = 2n + 1$   
On a :  $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7 \dots$   
Les termes de la suite  $u$  sont les entiers impairs.
  
- Soit la suite  $u$  de terme général  $u_n = 2^n$   
On a :  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 16 \dots$   
Les termes de la suite  $u$  sont les puissances de 2.
  
- Soit la suite  $u$  de terme général  $u_n = \frac{n}{n+1}$   
On a :  $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, u_3 = \frac{3}{4} \dots$

## 3. Les différents modes de génération d'une suite :

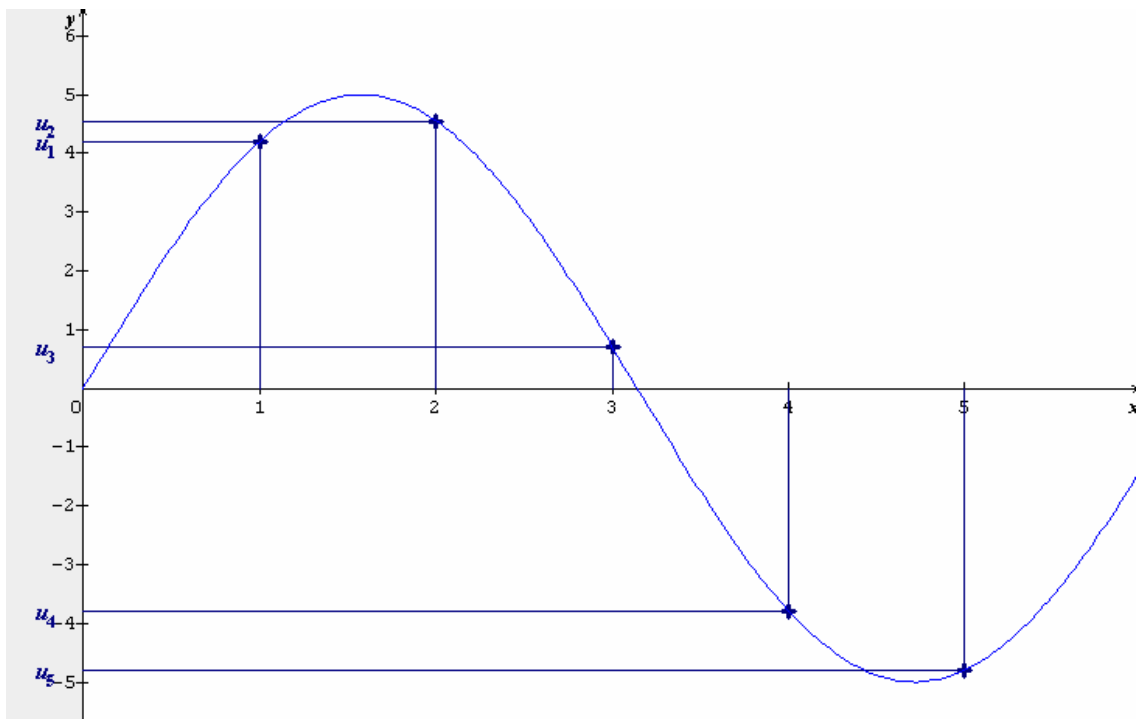
Une suite peut être définie de l'une ou l'autre des deux manières suivantes :

- **Définition d'une suite par la définition du terme général en fonction de  $n$  :**

Suite du type :  $u_n = g(n)$

On peut alors obtenir facilement la valeur d'un terme  $u_n$  pour une valeur de  $n$  donnée.

## Représentation graphique :



Représentation graphique de la suite de terme général  $u_n = 5 \sin n$

➤ Définition d'une suite par la donnée du 1<sup>er</sup> terme et d'une relation entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$

Suite du type : $u_{n+1} = g(u_n)$
------------------------------------

Les 2 exemples d'introduction (I.1.) sont des suites de ce type.

*Autre exemple :*

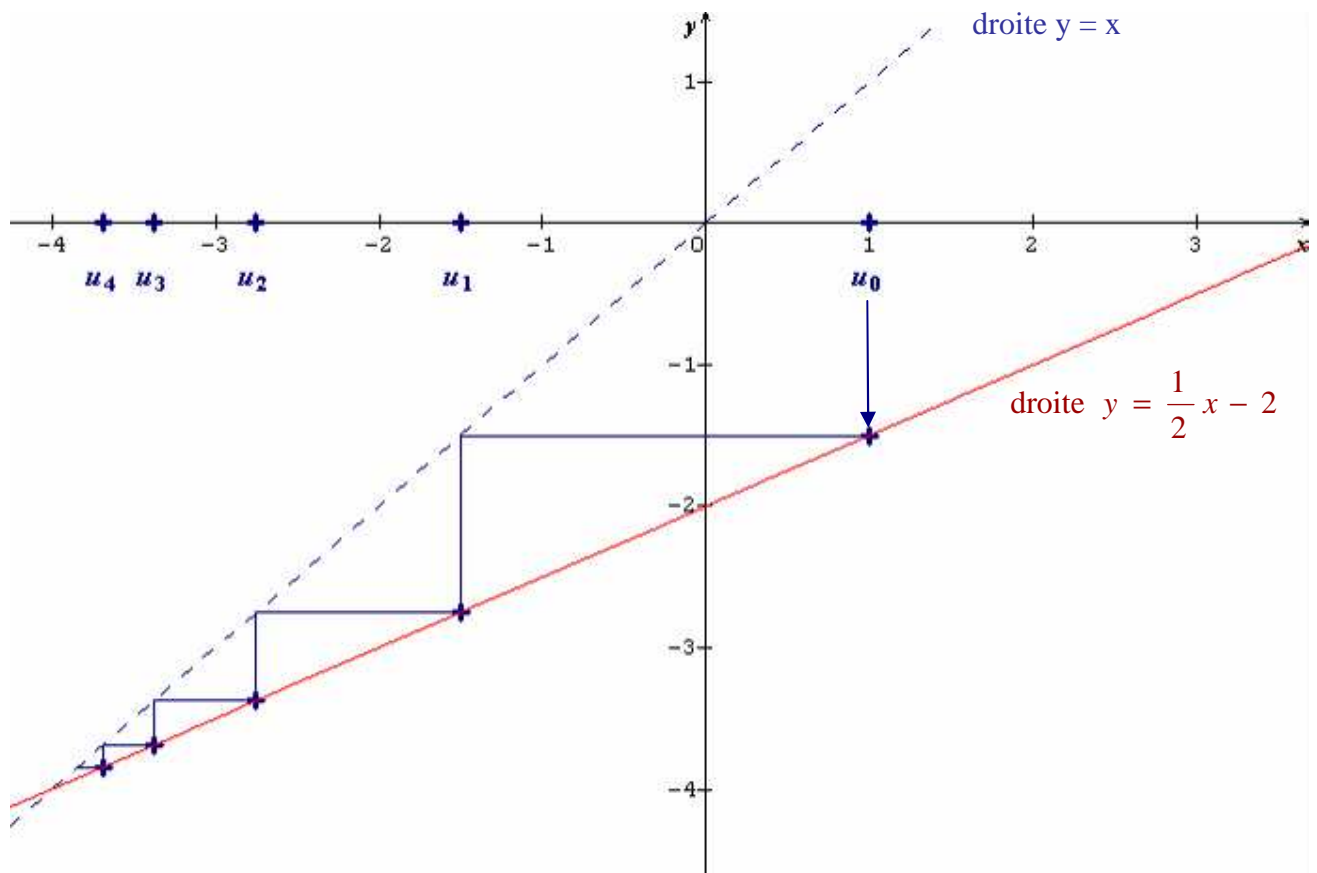
$$u_0 = 1$$

Suite définie par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$$

$$\text{On a alors : } u_1 = -\frac{3}{2}, u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{11}{4} \dots$$

## Représentation graphique :



## 4. Sens de variation d'une suite :

Une suite de terme général  $u_n$  est une **suite croissante** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Une suite de terme général  $u_n$  est une **suite décroissante** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Une suite de terme général  $u_n$  est une **suite constante (ou stationnaire)** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n = u_{n+1}$$

**Etude du sens de variation d'une suite :**

**Cas général :** on étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$

Si  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite est croissante.

Si  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la suite est décroissante.

**Exemple :**

Soit la suite  $u_n = \frac{2^n}{n}$  ( $n \geq 1$ ). Quel est le sens de variation de cette suite ?

**Solution :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n \times 2^{n+1} - (n+1)2^n}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(2n - n - 1)}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

Et pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$2n > 0$$

$$n - 1 \geq 0$$

$$n > 0$$

$$n + 1 > 0$$

Donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite est croissante.

**2<sup>ème</sup> Exemple :**

$$u_0 = -12$$

$$u_{n+1} = 4 + u_n$$

**Solution :**

$$u_{n+1} - u_n = 4$$

Comme  $u_{n+1} - u_n > 0$ , la suite est croissante.

**3<sup>ème</sup> Exemple :**

$$u_0 = -1$$
$$u_{n+1} = 3u_n + 4$$

**Solution :**

$$u_n = 3u_{n-1} + 4$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = 3u_n + 4 - u_{n-1} - 4 = 3(u_n - u_{n-1})$$

$$u_{n+1} - u_n \text{ a le même signe que } u_n - u_{n-1}.$$

$$u_n - u_{n-1} \text{ a le même signe que } u_{n-1} - u_{n-2}.$$

...

$$\text{que } u_1 - u_0$$

$$\text{Or } u_1 - u_0 = (3(-1) + 4) - (-1) = 2 + 1 = 2 > 0$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n > 0$$

La suite est croissante.

**4<sup>ème</sup> Exemple :**

$$u_0 = -2$$
$$u_{n+1} = 3u_n + 4$$

**Solution :**

$$u_1 = 3u_0 + 4 = -6 + 4 = -2$$

$$u_2 = 3u_1 + 4 = -6 + 4 = -2$$

....

La suite est constante.

**5<sup>ème</sup> Exemple :**

$$u_0 = -\frac{7}{3}$$
$$u_{n+1} = 3u_n + 4$$

**Solution :**

$$u_1 = 3u_0 + 4 = -7 + 4 = -3$$

$$u_2 = 3u_1 + 4 = -9 + 4 = -5$$

$$u_3 = 3u_2 + 4 = -15 + 4 = -11$$

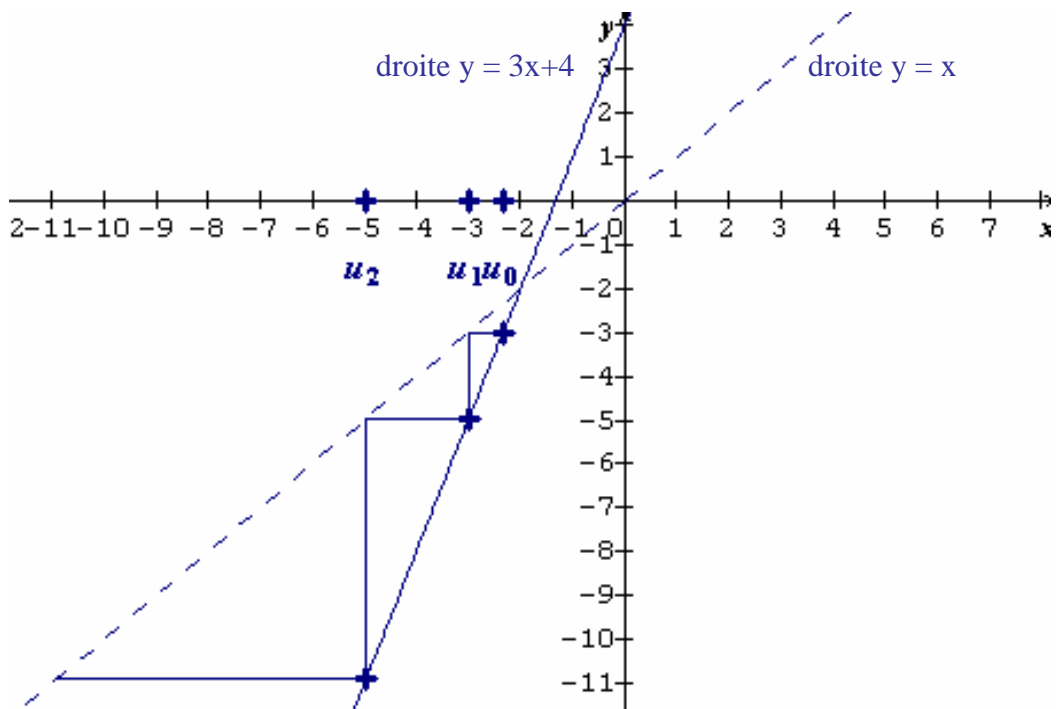
....

De même que dans le 3<sup>ème</sup> exemple,  $u_{n+1} - u_n$  a le même signe que  $u_1 - u_0$ .

$$u_1 - u_0 = -3 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

La suite est décroissante.

Représentation graphique de cette suite :



**Cas particulier :** suite du type  $u_n = g(n)$

Pour une suite de terme général  $u_n = g(n)$  :

- Si la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , alors la suite est croissante.
- Si la fonction  $g$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ , alors la suite est décroissante.

**Exemple :**

$u_n = \frac{4n + 1}{3n + 5}$ . Quel est le sens de variation de cette suite ?

**Solution :**

Soit  $g(x) = \frac{4x + 1}{3x + 5}$ . Etudions les variations de  $g$  sur  $[0; +\infty[$ .

$$g'(x) = \frac{4(3x + 5) - 3(4x + 1)}{(3x + 5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{12x + 20 - 12x - 3}{(3x + 5)^2} = \frac{17}{(3x + 5)^2}$$

Donc  $g'(x) > 0$  sur  $[0; +\infty[$ , donc  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

La suite est croissante.

## 5. Suite majorée, suite minorée :

Une suite de terme général  $u_n$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq M$ .

Une suite de terme général  $u_n$  est **minorée** s'il existe un réel  $M$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \geq M$ .

**Exemple :**

$$u_n = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$  donc  $u_n \geq 5$ . La suite est minorée par 5.

**Exemple :**

$$u_n = 7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$-\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0$  donc  $u_n \leq 7$ . La suite est majorée par 7.